FONCTIONS

I) Fonction

Définition : Définir une fonction sur un intervalle [a ; b], c'est donner un procédé qui, à chaque nombre x de l'intervalle [a ; b], fait correspondre au plus un nombre noté f (x).
On dit que x a pour image f (x) par la fonction f et que x est un antécédent de f (x) par la fonction f.

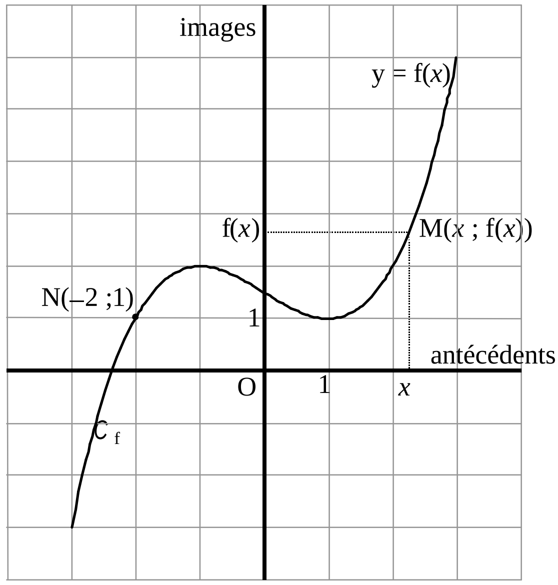
Exemple 1 : soit la fonction $f : x \mapsto f(x) = x^2 + 5$.

f (3) = ………. donc 3 a pour image …….. par la fonction f.

f (   ) = 21   donc   est un antécédent de 21 par f.

II) Représentation graphique

Définitions : Soit f une fonction définie sur l'intervalle [a ; b].
• La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ ou courbe représentative de f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées (x ; f(x)) où x est dans l'intervalle [a ; b].
• La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f a alors pour équation y = f(x).



Conséquences :
① Un nombre x et son image f(x) sont représentés par le point M de coordonnées (x ; f(x)).
② Les valeurs x se représentent en abscisses.
③ Les valeurs de f(x) se représentent en ordonnées.
④ Dire qu'un point M de coordonnées (x_M ; y_M) appartient à $\mathscr{C}_f$ revient à dire que son ordonnée y_M est égale à l'image de son abscisse x_M par f, soit $y_M = f(x_M)$.

Sur la figure ci-contre, la fonction f est définie sur l'intervalle [–3 ; 3].
Le point N(–2 ; 1) appartenant à C_f , on a : f(–2) = 1.

Exemple 2:
La fonction f représentée ci-contre est définie sur l'intervalle

....

$\mathscr{C}_f$ a pour équation ....

Lecture d'images
M(–1 ; 2) ∈ $\mathscr{C}_f$ donc f (.......) = ...

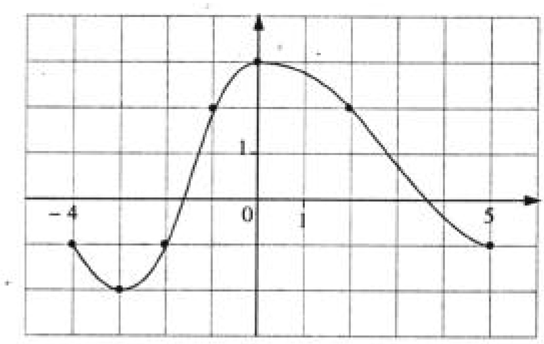
– 1 a pour image ....par f

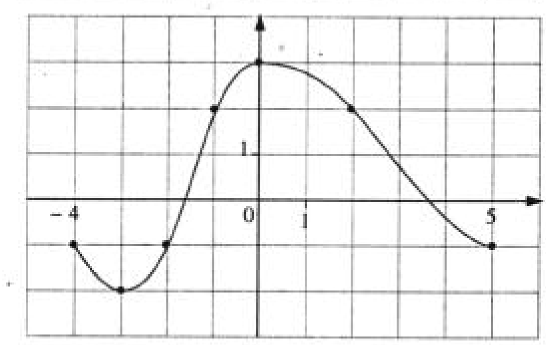
5 a pour image ………………..par f

Lecture d'antécédents

2 a pour antécédents ....par f

–1 a pour antécédents ....par f





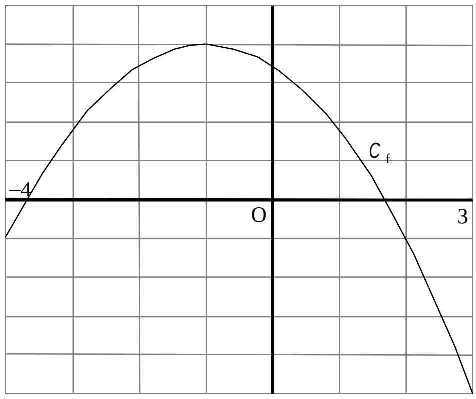
III) Variations ; extremum

1) Fonction croissante

Définition : Dire que f est une fonction croissante sur l'intervalle [a ; b] signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de [a ; b] :

si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$.

Remarque : Lorsque les valeurs de x augmentent, les valeurs de f(x) augmentent.



2) Fonction décroissante

Définition : Dire que f est une fonction décroissante sur l'intervalle [a ; b] signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de [a ; b] :

si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$.

Remarque : Lorsque les valeurs de x augmentent, les valeurs de f(x) diminuent.

Exemple : La fonction f de l'exemple 2 est décroissante sur l'intervalle [− 4 ; − 3] puis ....

....……………………………………………………………

Tableau de variation de la fonction f :

Extremums :

Sur l'intervalle [.........; ....] la fonction f admet un maximum pour x = ... Ce maximum vaut f (........) = ...

Sur l'intervalle [.........; ....] la fonction f admet un minimum pour x = ... Ce minimum vaut...............................

IV) Résolution d'équations et d'inéquations

1) Résolution graphique

Méthode :

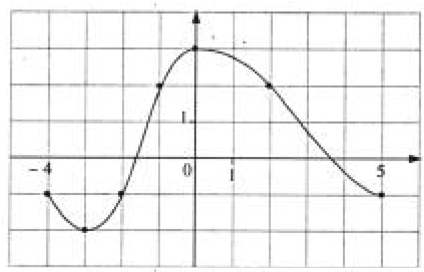
- f(x) = k quand la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe la droite horizontale d'équation y = m.
- f(x) ⩽ k quand la courbe $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de la droite horizontale d'équation y = m.
- f(x) = g(x) quand la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe la courbe $\mathscr{C}_g$
- f(x) ⩽ g(x) quand la courbe $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Cas particuliers :

- f(x) = 0 quand la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses.
- f(x) ≤ 0 quand la courbe $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de l'axe des abscisses.

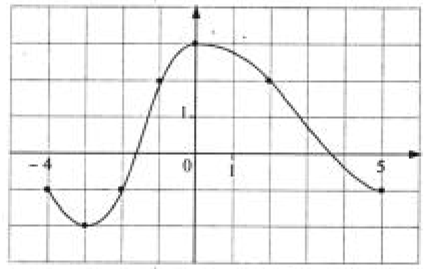
Remarque : Résoudre l'équation f(x) = k revient à déterminer l'antécédent de k par la fonction f.

Exemple 3 : Soit f la fonction de l'exemple 2 représentée ci-contre.



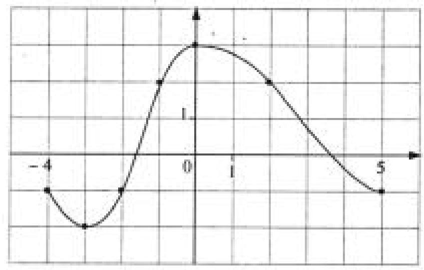
f(x) = 2 pour x = ...

f(x) ⩾ 2 pour x ∈ ....



f(x) = 0 pour x = ...

f(x) ⩽ 0 pour x ∈ ....



$f(x)=\frac{1}{2}x+3$ pour x = ...

$f(x) \geqslant -\frac{1}{2}x+3$ pour x ∈ ....

2) Existence et unicité de la solution de l'équation f(x) = k

Propriété : Si f est strictement croissante sur [a ;b] et si k appartient à l'intervalle (image) [f(a) ; f(b)] alors l'équation f(x) = k admet une solution unique α dans l'intervalle [a ;b].

x	…	a	b	…
Variation de f	…	f(a) ↗	f(b)	…

Remarques : ① Cette propriété permettra de résoudre numériquement des équations que l'on ne sait pas résoudre algébriquement.
② On a un énoncé analogue pour le cas d'une fonction strictement décroissante sur [a ; b].

V) Signe de la fonction f

Méthode :
- f(x) est positif (est de signe +) quand la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de l'axe des abscisses.
- f(x) est négatif (est de signe –) quand la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de l'axe des abscisses.

Exemple 4 : Soit f la fonction représentée ci-contre.

Tableau de signe de la fonction f :