

RELATIONS METRIQUES DANS LE TRIANGLE

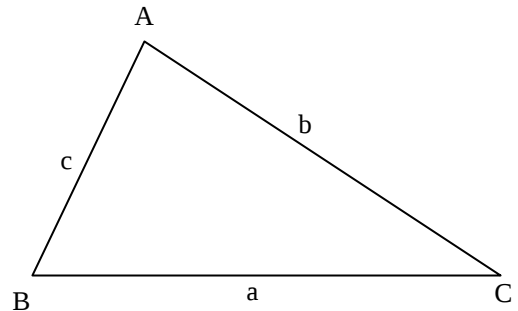
I) Notations utilisées

Nous utiliserons les notations suivantes pour un triangle ABC donné.

On désignera par :

- a, b, c : les longueurs des côtés opposés aux sommets A, B et C.
- $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$: les angles géométriques $\widehat{BAC}, \widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.
- S : l'aire du triangle.

Rappel : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.



II) Relation d'Al Kashi (ou de Pythagore généralisée)

Théorème : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

Remarques :

① Cette relation peut être appliquée :

- soit pour calculer l'angle si le triangle est donné par les longueurs a, b et c de ses trois côtés ;
- soit pour calculer le côté manquant, lorsque le triangle est donné par 2 longueurs et un angle.

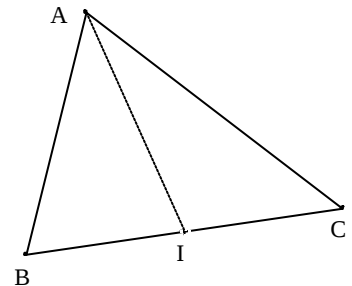
② On pourrait donner 2 autres relations, une commençant par $b^2 =$ et l'autre par $c^2 =$. En fait, on retiendra la configuration...

③ La relation se démontre en développant le carré scalaire $a^2 = \overline{BC}^2 = (\overline{BA} + \overline{AC})^2 = (\overline{AC} - \overline{AB})^2$.

III) Théorème de la médiane

Théorème : Soit I le milieu du segment [BC] et m_A la longueur de la médiane [AI].

- $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$.
- $m_A^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2$.



IV) Compléments : formules de l'aire et des sinus

Formule de l'aire : $S = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A}$, $S = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B}$, $S = \frac{1}{2}ab \sin \hat{C}$.

Formule des sinus : $\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} = \frac{2S}{abc}$.

Remarque : Cette relation peut être utilisée :

- soit pour calculer la longueur d'un côté, lorsque le triangle est donné par 2 angles et un côté ;
- soit pour calculer un angle si le triangle est donné par 2 longueurs et un angle opposé à l'un des côtés précédents.

ATTENTION : Dans ce cas, on déterminera si l'angle cherché est obtus ou aigu.

V) Quelques valeurs exactes de cosinus et sinus

Les angles sont en degré.

Angle en °	30	45	60	90	120	135	150
Cosinus	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
Sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$