

DERIVEES

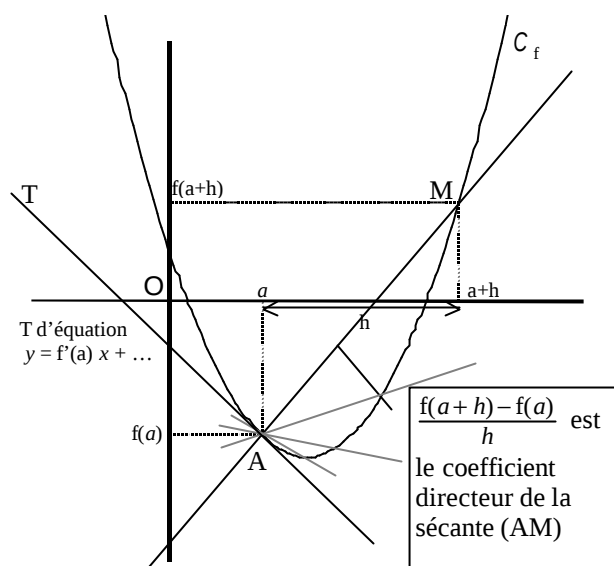
I) Nombre dérivé d'une fonction en a

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , a un nombre réel de I et C_f la courbe représentative de la fonction f .

Définition : On dit que la fonction f est dérivable en a et admet pour nombre dérivé le réel m , si le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers m quand h tend vers 0.

Le nombre dérivé m de f en a est noté $f'(a)$.

On pourra écrire $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.



Définition de la tangente : Lorsque h tend vers 0, le point M de C_f tend vers A et la sécante tend vers une position limite : cette position limite de la sécante, lorsqu'elle existe, est la tangente T .

Théorème : Soit f une fonction dérivable en a . Le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point A de coordonnées $(a ; f(a))$ est le nombre dérivé $f'(a)$ de f en a .

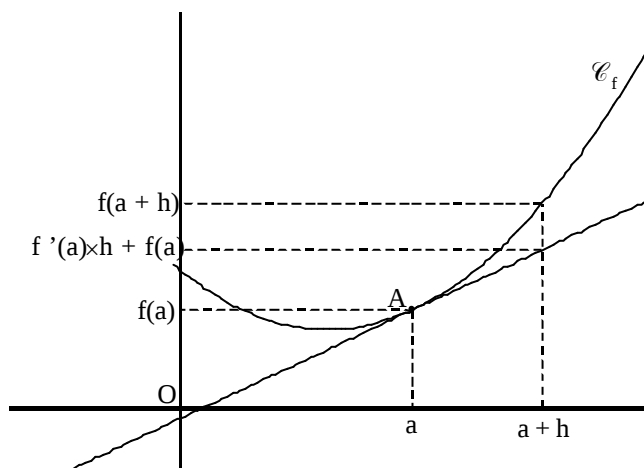
Remarque : Rechercher une équation de la tangente à C_f au point de coordonnées $(a ; f(a))$ revient à chercher une équation de la droite passant par le point de coordonnées $(a ; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Théorème : Soit f une fonction dérivable en a . Une valeur approchée de $f(a+h)$ est : $f(a) + f'(a) \times h$ lorsque h est «petit ».

On peut écrire que pour h voisin de 0,

$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a) \times h$.

Définition : Soit f une fonction dérivable en a . La fonction affine $h \mapsto f'(a) \times h + f(a)$ est une approximation affine de f en a .



II) Fonction dérivée

1) Définition

Définition : Lorsque, pour tout a de I , la fonction f est dérivable en a , on dit qu'elle est dérivable sur I .

La fonction qui, à chaque réel x de I , associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f sur I et est notée f' .

2) Dérivées des fonctions usuelles

Théorème :

Type de fonction	Fonction	dérivable sur	Fonction dérivée
constante	$x \mapsto k$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
identité	$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 1$
affine	$x \mapsto ax + b$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a$
puissance	$x \mapsto x^n, n \geq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto n x^{n-1}$
inverse	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
racine carrée	$x \mapsto \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
sinus	$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$
cosinus	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$

3) Règles de dérivation de la somme, d'un produit, d'un quotient... de 2 fonctions.

Théorème :

SI	ALORS	ET
u et v sont deux fonctions dérivables sur I, de fonctions dérivées respectives u' et v'	la fonction $u + v$ est dérivable sur I	$(u + v)' = u' + v'$
	la fonction uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
	la fonction ku , où $k \in \mathbb{R}$ est dérivable sur I	$(ku)' = k u'$
	la fonction u^2 est dérivable sur I	$(u^2)' = 2u u'$
	la fonction u^n est dérivable sur I, $n \geq 1$	$(u^n)' = n u^{n-1} u'$
et si, de plus v ne s'annule pas sur I	la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
	la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

4) Dérivée de la fonction $x \mapsto g(ax + b)$.

Théorème : Si pour tout nombre réel x d'un intervalle I, la fonction g est dérivable en $ax + b$, alors la fonction composée f définie sur I par $f(x) = g(ax + b)$ est dérivable sur I et : $f'(x) = ag'(ax + b)$.

III) Application de la fonction dérivée f' : sens de variation de f

1) Variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa dérivée.

Théorème :

Si f est croissante sur I ,
alors $f' \geq 0$.

Si f est décroissante sur I ,
alors $f' \leq 0$.

Si f est constante sur I ,
alors $f' = 0$.

Théorème : Principe de Lagrange (1736-1813) « *Théorie des fonctions analytiques* (1797) ».

Si f' est positive sur I , alors f est
croissante sur I .

Si f' est négative sur I , alors f
est décroissante sur I .

Si f' est nulle sur I , alors f est
constante sur I .

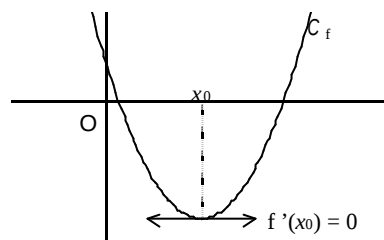
Méthode : Le signe de la fonction dérivée f' donne donc le sens de variation de la fonction f .

2) Extremum(s)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel de I .

Théorème : Si f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque : La réciproque de ce théorème est fausse ; chercher des contre-exemples.



Théorème : Si la dérivée f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local de f sur I .

x	x_0
Signe de $f'(x)$	$-$ 0 $+$
Variation de f	

Dans le cas ci-contre, d'après le Principe de Lagrange :

- f' négative avant x_0 , donne f décroissante avant x_0 ;
- f' positive après x_0 , donne f croissante après x_0 .

Alors f possède un minimum local $f(x_0)$ en x_0 .